進化ゲーム理論を用いた先物市場の分析[1]

明治大学大学院 理工学研究科　吉川 満[2]

本論文は金融市場の板情報に着目し, 進化ゲーム理論を用いて, i) 市場の状態の把握, 次期の予測, ii) 最適なプロファイルの導出, iii) 実際の市場の分析を行う. ここで市場には潜在的に売り手と買い手が多数存在し, 提示する価格を戦略として売買を行っていると考える.

1　はじめに

本稿はゲーム理論を用いて, 市場における各主体の行動に着目し, 理論を構築しようとするものである. Black-Sholes [1] をはじめとする数理ファイナンスの分野においては, 危険資産, 株価は幾何 Brown 運動するという前提の下で議論されている. そのためこの経済にいる主体の利得は仮想的にランダムに変化していると考えることができる. このように利得がランダムに変化するゲームはどの戦略が Nash 均衡となるのかは容易ではない.

そこで Kikkawa [4] ではこの問題を対称 2 人ゲームで行った. 本稿ではそれを非対称 2 人ゲームの枠組みに拡張し, 金融市場の枠組みで考察した. このモデルは進化ゲーム理論の枠組みで考察するため, 平衡点において, 利得が確定するような市場, 先物市場, (ヨーロピアン) オプション市場を念頭に置いている. これを基礎として, 予測, さらには実際のデータ (日経 225 先物 1 限月 1 分足, 2009 年 8 月 26 日) を使用し, 変動するデータから分かる市場の構造や最適な行動プロファイルを導出する.

2　モデルとその応用 (日経 225 先物市場)

ここでは進化ゲーム理論を用いて, 市場のモデルを構築する.[3] ここでは潜在的に, 大人数の主体がおり, 2 つのグループがあるとする. ここでは売り手と買い手を想定している. ある期にそれぞれのグループからランダムに 1 人づつ選ばれ, 選ばれた主体同士がゲーム, 売買を行うとする.

本稿では一般的な金融市場を想定しているので, 例えば板情報の下で, ある 1 単位の 1 つの財の売買を行っていると考える. よってここで各主体の戦略とは, ある財 (株など) をいくらで買う, 売るのかという価格を表している. 取引所は板情報に基づいて, 約定値段を決め, 売買契約を締結さ

[1]本研究の一部は, 平成 20 年度採択, 文部科学省 グローバル COE プログラム「現象数理学の形成と発展」現象数理若手プロジェクトに関する研究拠点形成費の助成を受けて行われた.

[2]E-mail: mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

[3]市場のマイクロストラクチャーのモデル Easley and O'hara [2] とは異なり, 情報構造など大幅に簡略化している. 分析しているような短期市場において, 実際良い情報の獲得如何により価格が変動することは見られるが, 本稿ではより基本な市場における売買モデルの構築を目的としたため, 情報の効果を考慮しなかった.

せる．ただしこのモデルではダブルオークションのような数量まで考察することはできない．そのため数量は多くの人がその価格で売買するということで表現している．

またここで戦略は {bear, bull} などの 2 つの戦略があるとし，毎期独立に戦略を選択するとする.[4] 特にここでは前期の市場を参考に今期の戦略，行使価格を決定する．例えば前期が約定値段が上昇した場合は，今期も約定値段が上昇する (買い手の場合，bear)，あるいは下落する (買い手の場合，bull) など予測し，行使価格を決定するとする．

ここでの各主体の利得は締結した売買契約をもとに，各主体の利得が定まり，ゼロ=サム型の利得構造をしている．よって $S(t)$ を現在の財の価格とすると，このときの各主体の利得はそれぞれ $S(t)-K$, $K-S(t)$ となる．ただしここで K は行使価格を表し，実際に利得が得られるのは，期末である．このゲームは次の利得表のように書くことができる．

I＼II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$a(t), -a(t)$	$0, 0$
戦略 2	$0, 0$	$b(t), -b(t)$

利得表 1

このときの Replicator 方程式は次のようになる．

$$\dot{x} = x(1-x)\big\{-b(t) + \big(a(t)+b(t)\big)y\big\}, \qquad \dot{y} = y(1-y)\big\{b(t) - \big(a(t)+b(t)\big)x\big\}, \tag{1}$$

ただし x を売り手が戦略 1 を採用する確率とし，y を買い手が戦略 1 を採用する確率とする．

今までが Replicator 方程式を用いて，市場モデルの定式化とその性質であった．次にこの Replicator 方程式を用いて，次期の各主体の行動を予測するための方程式を導出する．(1) の両辺を $xy(1-x)(1-y)$ で割り，整理すると，次を得る．

$$\dot{x} = -\frac{b(t)}{y} + \frac{a(t)}{1-y}, \qquad \dot{y} = \frac{b(t)}{x} - \frac{a(t)}{1-x}. \tag{2}$$

実はこの非対称 2 人ゲームは**ハミルトニアン**(Hamiltonian) と呼ばれる保存量を持ち，次の**正準方程式**(canonical equation) を得る．

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3}$$

ただし $H = -b(t)\big(\log x + \log y\big) - a(t)\big(\log(1-x) + \log(1-y)\big)$ である.[5] また上述の正準方程式 (2) を微分の公式から離散化すると，次を得る．

$$x(t+\varepsilon) = x(t) - \Big(\frac{b(t)}{y(t)} - \frac{a(t)}{1+y(t)}\Big)\varepsilon, \qquad y(t+\varepsilon) = y(t) + \Big(\frac{b(t)}{x(t)} - \frac{a(t)}{1-x(t)}\Big)\varepsilon. \tag{4}$$

この式を用いることによって，1 期先の x, y の値を知ることができる．

[4] 実際の市場では，各主体の戦略の数はせいぜい 5 つ程度である．また 1 分や数十秒程度の超短期的な市場の場合で考えると，3 つ程度 (bear 的，bull 的，約定値段と同じ戦略) で構わない．

[5] このハミルトニアンを時間に関して，1 階時間微分すると，0 となるため，**保存系**(conservative system) と呼ばれる．

次に価格の変動に着目し, 利得表を決定する. 市場の状態は3つに分類することができる. つまり t 期の約定値段が $t-1$ 期のものに比べて, (i) 変わらない, (ii) 上がる, (iii) 下がる場合の3つの場合しかない.

買い手が戦略1を採用する場合は, bull(強気)で安い価格を提示, 戦略2の場合はbear(弱気)で高い価格を提示すると解釈する. 売り手の場合も同様に戦略1を採用する場合は, bear(弱気)で安い価格を提示, 戦略2の場合はbull(強気)で高い価格を提示すると解釈する. また利得表中の利得は符号で表している.

(i) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**変化しない**場合 (利得表 2-1):

この利得表は約定値段が変化しない時において, Nash均衡が混合戦略となるように利得を変更した. 買い手と売り手が共に戦略1(2)を採用した場合は, 売り手は約定値段よりも安(高)い価格で取引ができ, 売る(買う)ことができたと解釈することにより, 正の利得を得る. 逆に買い手はより有利な条件で購入することができるので, 負の利得を得ると解釈する. また買い手と売り手の戦略が合致しない場合, 例えば買い手が戦略1を採用し, 売り手が戦略2を採用した場合は, 価格が一致しないため, 約定が成立しないために, 各主体の利得は0となる. またこのゲームのNash均衡は混合戦略である.

(ii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**上昇 (下落)** する場合 (利得表 2-2, 2-3):

この利得表は買い手は戦略1の安い価格を提示し, 売り手も戦略1の安い価格を提示すると, 約定が成立し, 買い手は正の利得を得, 売り手は負の利得を得る. 買い手, 売り手共に戦略2を提示した場合は, 期待通りに約定が成立し, 買い手, 売り手共にいくらかの正の利得を得る. また戦略が一致しない場合は上述と同じである. またこのゲームのNash均衡は, (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略2, 戦略2) のみである. よってこのときは価格は上がりやすいことを示している. 下落する場合は利得表2-3の戦略1を戦略2, 戦略2を戦略1に置き換えれば, 同じ論理である.

I＼II	戦略1	戦略2
戦略1	−,+	0,0
戦略2	0,0	−,+

利得表 2-1

I＼II	戦略1	戦略2
戦略1	+,−	0,0
戦略2	0,0	+,+

利得表 2-2

I＼II	戦略1	戦略2
戦略1	+,+	0,0
戦略2	0,0	−,+

利得表 2-3

ここで上述のモデルを用いて, 実際の市場を分析する. ここではある日における1分足の日経225先物市場における指数の終値データを用いて, 市場の状態を分析する. 例えば2009年8月26日の先物市場において, 値段が上昇した90回, 利得表2-2を使用し, 逆に値段が下落した89回は, 利得表2-3を使用し, 値段が変わらない314回 (取引なし68回) は利得表2-1を使用した場合のReplicator方程式(4)の軌跡 ("20090826-rep.dat") である. また紙面の都合上, データなどを示すことはできないが, 今期指数が上がると, 次の期も上がる, 逆に下がると, 次の期も下がるというような連続した指数の変化はあまり起こらない. このことに着目すると, 次の期の状態における行動が推測しやすい. つまり今期指数が上昇すると, 次の期は変化しないか, 下落する確率が高い. 逆に今

期指数が下落すると, 次の期は変化しないか, 上昇する確率が高い. この考えを用いると, 他の主体を出し抜けることができる ("20090826-pred.dat").

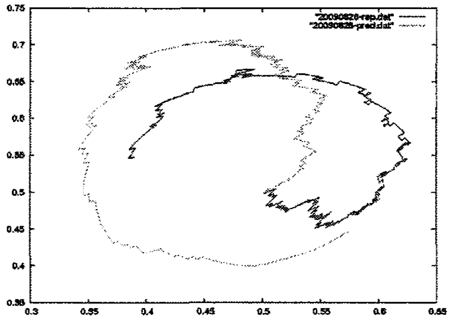

図 1: 2009 年 8 月 26 日 日経 225 先物 1 限月 1 分足のデータを利用し, "20090826-rep.dat"が Replicator 方程式 (2.5) の軌跡, "20090826-pred.dat"は各主体の行動を予測した上で, 最適な行動の軌跡を表している. (x, y の初期値は共に 0.5 とした.)

以上のように短期市場の特性を利用して, 利得表を新たに定式化し, 各主体の最適な行動プロファイルを導出した.

3 終わりに

以上のようにまず先物市場を定式化し, 市場における約定値段の動態に着目し, 市場の状態を分類した. 次に進化ゲーム理論を利用することによって, 1 期先予測, さらにはそれを見越した各主体における最適な行動プロファイルを導出した.

ゲーム理論は利得の決定の仕方によって, Nash 均衡が決定する. そのため一見尤もらしい利得表も間違ってしまうことがある. そこで実際の状況から利得を定めるという手法を用いた.

今後の課題として, 板情報を忠実に表す $n(\sim 3,4)$ 戦略の場合, さらには板情報が決定すれば, 約定値段が決定する. それを取り入れたモデリングが必要だと考える. また実務への応用のためには, 過去のデータを用いた分析ではなく, 今現在のデータを入手し, それを加工するというオンラインリアルタイムの分析が今後重要となってくると考えている.

参考文献

[1] F. Black and M. Scholes, The Journal of Political Economy, **81** (1973), 637.

[2] D. Easley and M. O'hara, The Journal of Finance, **47** (1992), 577.

[3] 吉川 満, 北海道大学数学講究録, **140** (2009), 142.

[4] M. Kikkawa, 京都大学数理解析研究所講究録, (2009), 印刷中.